数論幾何の風景 —— 数の加減乗除から対称性の幾何まで

望月新一（京都大学数理解析研究所）

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~motizuki
「出張・講演」

§1. 加減乗除で閉じている数の集合「体」とその対称性を表す「ガロア群」

§2. 位相曲面上の「輪体」と「被覆」

§3. 数論と幾何に共通する「絡まり合いの構造」

§1. 加減乗除で閉じている数の集合「体」とその対称性を表す「ガロア群」

数論の原点は様々な**「数の集合」**の研究にある。研究対象となる代表的な「数の集合」の例としては

$$
\begin{array}{cccc}
\text{自然数} & \mathbb{N} & = & \{0,1,2,\ldots\} \\
\text{整数} & \mathbb{Z} & = & \{0,\pm1,\pm2,\ldots\} \\
\text{有理数} & \mathbb{Q} & = & \{a/b \mid a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\} \quad \Big(\subseteq\ \mathbb{R}\ =\ \{a \mid a \text{ は実数 }\}\Big)
\end{array}
$$

のような「普通の数」からなる集合の他にも、**代数的数**

$$
\overline{\mathbb{Q}} \quad = \quad \{x \ \in\ \mathbb{C} \mid x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots c_1 x + c_0 = 0;\ c_0, c_1, \ldots, c_{n-1} \in \mathbb{Q}\}
$$
$$
\Big(\subseteq \quad \mathbb{C} \quad = \quad \{a + bi \mid a, b\ \in \mathbb{R}\}\Big)
$$

のような「普通の数」の範囲を超えた集合もある。

このような種々の「数の集合」の中でも、**「加減乗除で閉じている」**数の集合、つまり**「体」**は特に重要である。先ほどの例では、$\mathbb{Q}$, $\overline{\mathbb{Q}}$ や実数体 $\mathbb{R}$, 複素数体 $\mathbb{C}$ は体の基本的な例になる。その他にも、数論ではこれらの体の**部分体**＝つまり、加減乗除で閉じている部分集合を扱うことがある。部分体を特定するときは、**「部分体の生成元」**を用いることが多い。これはつまり、「それらの（生成）元を含む最小の部分体」という性質によって部分体を特定するという仕組みである。例えば、$\overline{\mathbb{Q}}$ の部分体で有限個の生成元で生成される体のことを**「数体」**と呼ぶのだが、数体の具体例として次のようなものが挙げられる：

$$
\mathbb{Q}; \quad \mathbb{Q}(\sqrt{-1}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}); \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})
$$

数体 $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$ の場合、$\sqrt[3]{2}$ と

$$
\omega \quad \stackrel{\mathrm{def}}{=} \quad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \quad = \quad e^{2\pi i/3} \quad \in \quad \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})
$$

を生成元に採ることも可能である。

数体の研究では、**「ガロア群」**は非常に基本的な役割を果たす。数体 $F \subseteq \overline{\mathbb{Q}}$ の「ガロア群」$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ は簡単にいうと、加減乗除と両立的である、すべての全単射

$$
F \quad \stackrel{\sim}{\to} \quad F
$$

からなる集合である。

例えば、数体 $F \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ の場合、生成元の行先を指定すれば定まる $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ の二つの元 σ, τ を

$$\begin{array}{rcl} \sigma: F & \to & F \\ \sqrt[3]{2} & \mapsto & \sqrt[3]{2} \\ \omega & \mapsto & \omega^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \tau: F & \to & F \\ \sqrt[3]{2} & \mapsto & \omega \cdot \sqrt[3]{2} \\ \omega & \mapsto & \omega \end{array}$$

と定義すると、

$$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) = \{\mathrm{id}, \sigma, \tau, \tau \cdot \sigma, \tau^2, \tau^2 \cdot \sigma\}$$

（ただし、id は恒等写像）となることは簡単な計算によって確認することができる。

§2. 位相曲面上の「輪体」と「被覆」

次に幾何について少し考察してみよう。「適切な条件」を満たす、複素数係数の二変数多項式の、複素数体 $\mathbb{C}$ 内の**解の集合**を考えると、（複素）平面内の**単位円盤**と**「局所的に同型」**な幾何的対象＝**「位相曲面」**が出来上がる（図 1 を参照）。

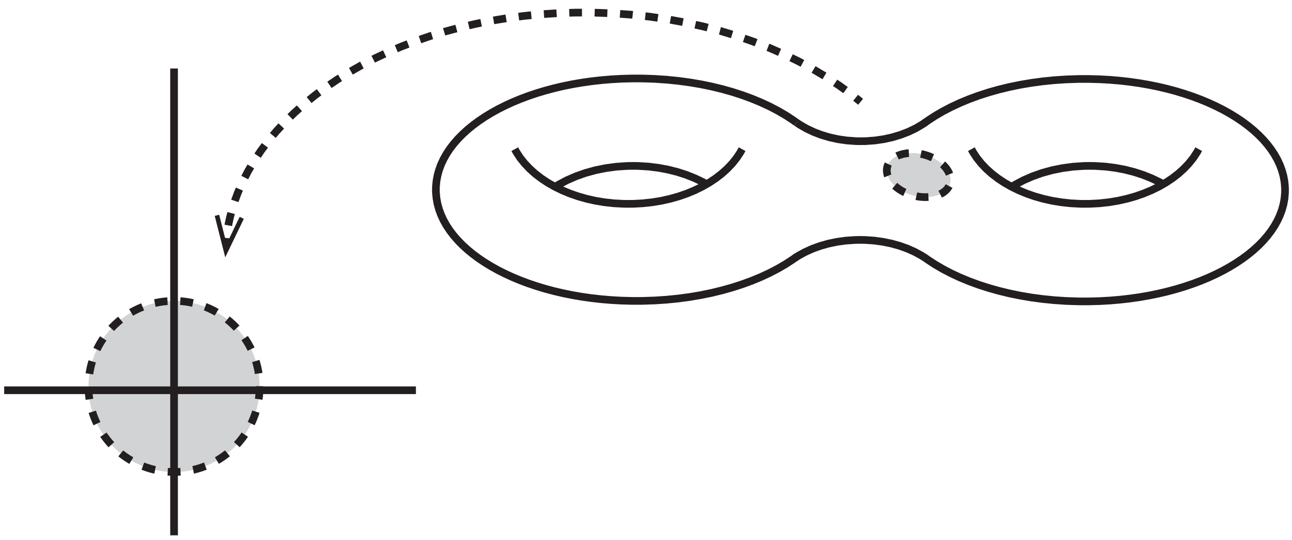

図１：単位円盤と局所的に同型な位相曲面

例えば、有名なフェルマ予想に出てくる方程式

$$X^n + Y^n = 1$$

（ただし、$n \geq 3$ は整数）は先ほどの「適切な条件」を満たしている。

位相曲面の幾何を研究する上においてその曲面上の様々な**「輪体」**の幾何は重要なテーマとなる。特に曲面上のすべての輪体が「生成」する**「基本群」**は曲面の幾何を解明する上において重要な道具になる。例えば、曲面の**「種数」**（＝ドーナツ型の穴の数）が g だとすると、基本群の生成元として、図２のように「きれいな十字形」（＝「重複度 1」）で交わる「きれいな輪体たち」

$$\alpha_1,\ \beta_1,\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \ldots \alpha_g,\ \beta_g$$

を採ることができる。この生成元たちは次のような基本的な**関係式**

$$\alpha_1 \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1^{-1} \cdot \beta_1^{-1} \cdot \alpha_2 \cdot \beta_2 \cdot \alpha_2^{-1} \cdot \beta_2^{-1} \cdot \ldots \cdot \alpha_g \cdot \beta_g \cdot \alpha_g^{-1} \cdot \beta_g^{-1} \quad = \quad 1$$

を満たす。この関係式は生成元たちの**「交わり方」＝「絡まり合い方」**の様子を記述しているものと見ることができる。

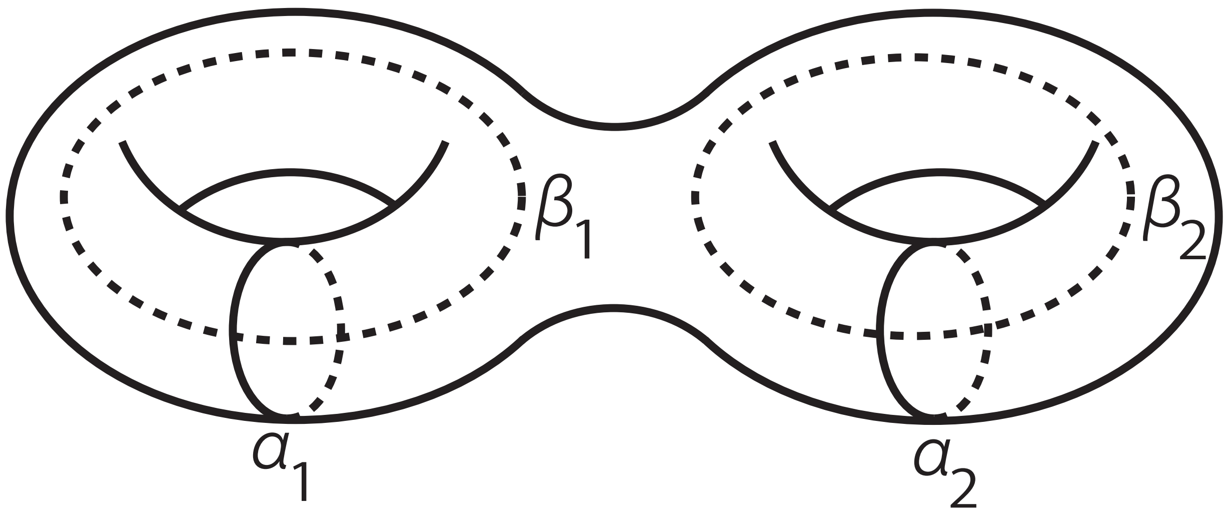

図２：「重複度 1」で絡まり合う、位相曲面上の代表的な輪体

位相曲面の基本群は先ほど「輪体で生成される群」として定義したわけだが、実は**「曲面の被覆の変換群」**として定義することも可能である。ここ

でいう「曲面の被覆」とは、他の曲面から、元々与えられた曲面への写像であり、かつその写像を局所的に見ると、与えられた曲面の小さな近傍のコピーを何枚か集めたような構造になっているようなものをいう。コピーの「枚数」が有限なときは被覆を**有限次被覆**と呼ぶ。実は、有限次被覆は元々与えられ

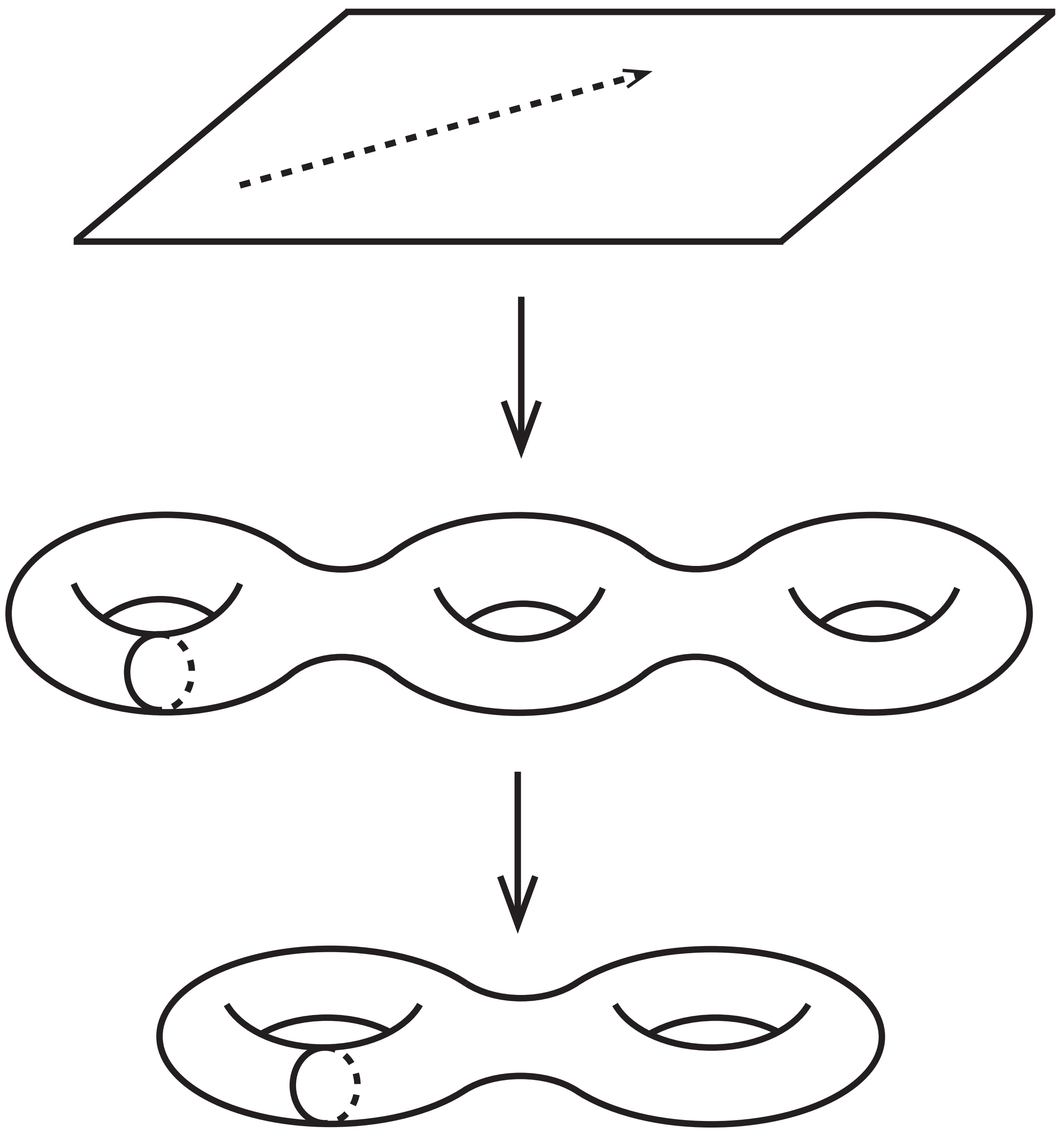

図３：位相曲面の有限次被覆とその上にある無限次の被覆

た曲面と同様に（複素数係数の）多項式の解の集合として「**代数的**」に定義されるものになる。しかも元々与えられた曲面を定義する多項式の係数が**代数的数**、つまり $\overline{\mathbb{Q}}$ の元に取れるとき、被覆の曲面を定義する多項式の係数も同様に代数的数になるように取れることは簡単に示すことができる。この「**被覆の代数性**」という性質は次節では重要な意味を持つ。

一方、コピーの枚数が無限になるような**無限次被覆**も決して役に立たないものではなく、例えば、基本群の先ほどの二種類の定義（＝「輪体」によるものと、「被覆」によるもの）が実は**同値**であるという事実は、無限次被覆を用いて証明するのである。具体的には、元々与えられた曲面の輪体を無限次被覆に「閉じていない道（＝「パス」）」として持ち上げ、その道の始点を終点に写すような変換群の元を考察することによって示すのである（図 3 を参照）。

§3. 数論と幾何に共通する「絡まり合いの構造」

さて§1 に登場した数体 $F \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3}) = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \omega)$ のガロア群

$$\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q}) \;=\; \{\mathrm{id}, \sigma, \tau, \tau\cdot\sigma, \tau^2, \tau^2\cdot\sigma\}$$

の話に戻ろう。このようなガロア群に対応する体は「**クンマー拡大**」と呼ば

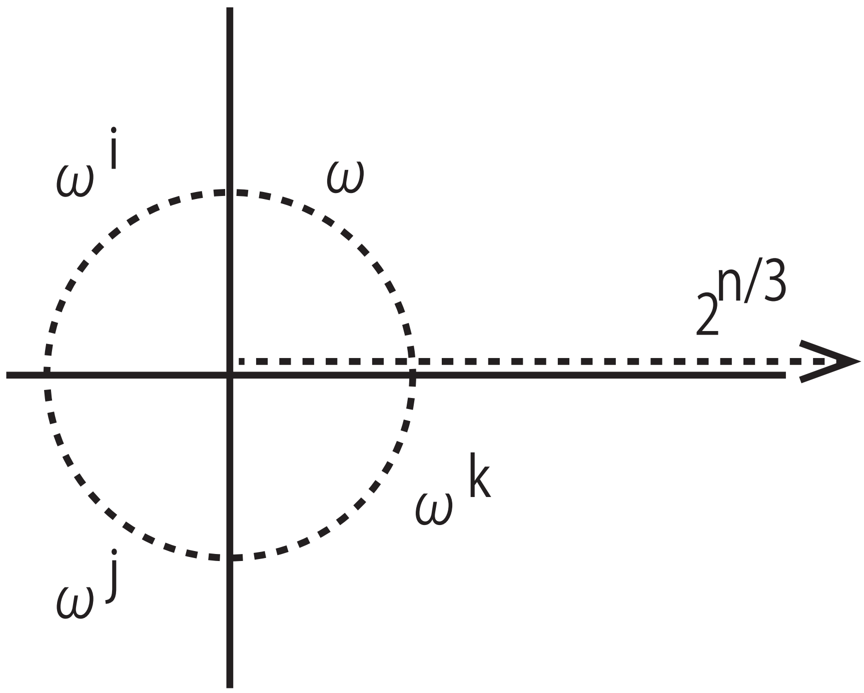

図４：クンマー拡大から生じる「数論的な重複度 **1** の絡まり合い」

れるものでそのガロア群は特殊な構造を持っている。具体的に書くと、ガロア群の生成元 σ, τ は（簡単に確認できるように）次のような関係式を満たしている：

$$\sigma^2 = \tau^3 = \mathrm{id}, \qquad \sigma \cdot \tau \cdot \sigma^{-1} = \tau^2$$

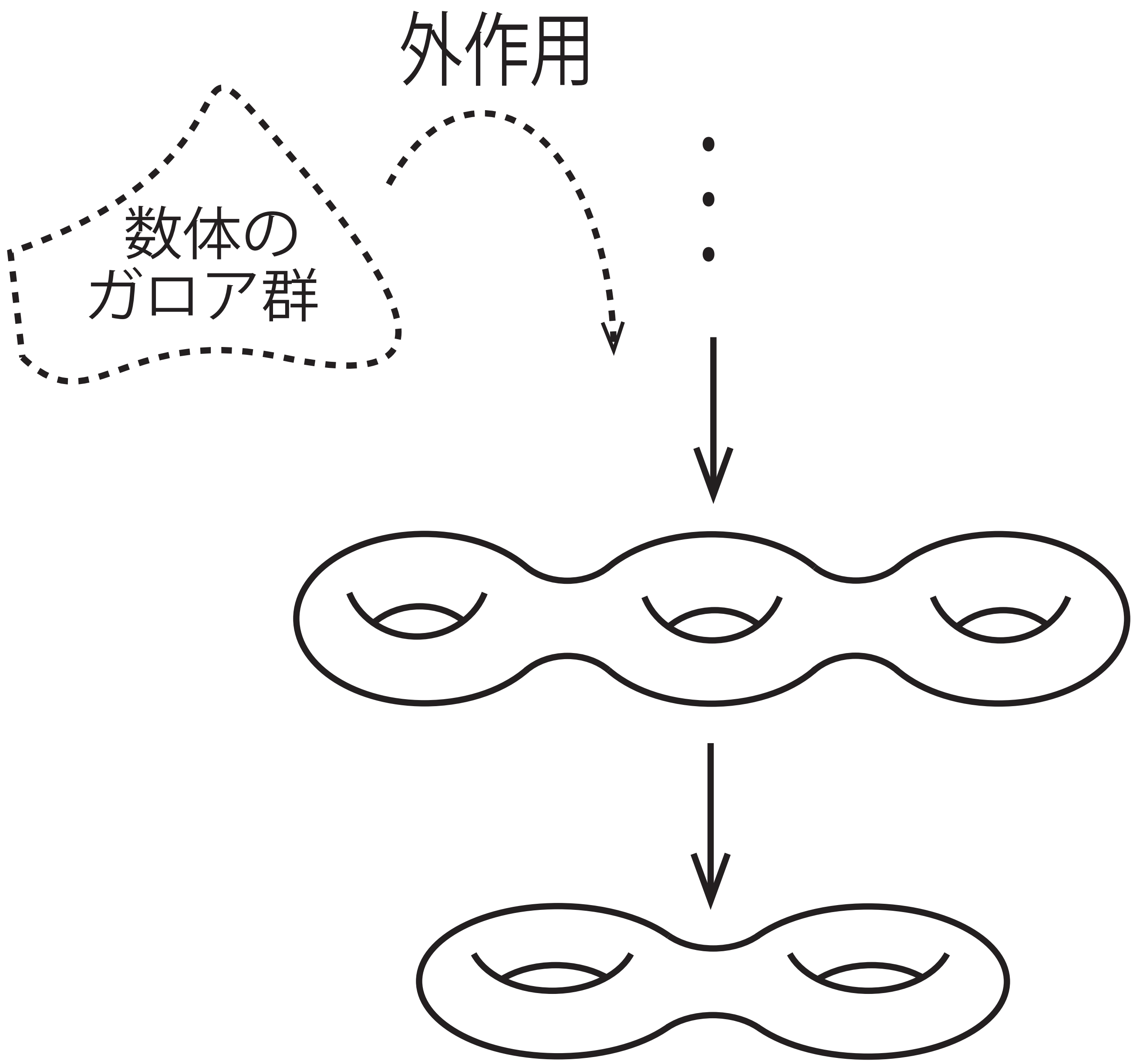

図５：数体の絶対ガロア群は位相曲面の副有限基本群に自然に外作用する

特に最後の関係式は σ と τ の**「絡まり合い方」**を記述しているものと見ることができ、基本群の輪体に関する関係式を連想させられるものである。実際、σ が、**単位円**の上に載っている一のベキ乗根 ω に（定義より）関係していて、τ の方が、**実軸**の上に載っている $\sqrt[3]{2}$（やその自然数ベキ）に（定義より）関係していることを思い出すと、この「絡まり合い方」は正に「単位円」と「実軸」という「数論的な輪体」の絡まり合い方を反映しているものと見ることができ、益々§2 の輪体の絡まり合いの議論を連想させられるものである（図 4 を参照）。

実は、この**数論と幾何の構造的類似性**は決して哲学的な観察に留まるものではなく、様々な形で厳密な数学として定式化することが可能である。このような定式化において重要な役割を果たすのは、§3 の議論で言及した、**「有限次被覆の代数性」**である。この代数性を用いることにより、数体のガロア群が、（ある適切な意味において）有限次被覆の変換群に自然に作用することを示すことができる。この作用のことを、**数体の絶対ガロア群の副有限基本群への外作用**と呼ぶ（図 5 を参照）。

先ほどの**「数論と幾何の構造的類似性」**を（何らかの意味において）テーマとした定理は無数にあり、時間の関係で個々の定理をここで詳しく紹介することはできないが、1990 年代以降、**数理解析研究所**を中心に活躍した、**「数論的基本群」**関連の研究を手掛ける研究者グループ（＝伊原康隆、松本眞、中村博昭、玉川安騎男、望月新一、古庄英和、星裕一郎等々）の仕事の大部分は正に本講演で紹介したような数学的設定（＝**「風景」**）の下でこのようなテーマやその延長線上にある内容を扱っているのである。